# Zur Iteration reeller Funktionen.

Von

U. T. Bödewadt in Posen.

---

Eine Funktion $f(x)$ wird iteriert, indem man in sie ihren Wert als Argument einsetzt: $f(f(x))$. Durch Wiederholung entsteht eine Funktionenfolge, die im folgenden durch Beifügung der hochgestellten Zahl der Iterationen in eckigen Klammern bezeichnet werden soll:

$$f^{[1]}(x) = f(x), \quad f^{[n]}(x) = f\left(f^{[n-1]}(x)\right). \tag{1}$$

Die daraus folgenden Regeln

$$\begin{aligned} f^{[m]}\left(f^{[n]}(x)\right) &= f^{[m+n]}(x), \\ (f^{[m]})^{[n]}(x) &= f^{[m\cdot n]}(x), \end{aligned} \tag{2}$$

deren Ähnlichkeit mit den Potenzgesetzen in dem Beispiel $f(x) = c\cdot x$ zur Identität wird, führen dazu, $f^{[0]}(x) = x$ zu setzen und unter $f^{[-1]}(x)$ die Umkehrfunktion zu $f(x)$ zu verstehen, so daß

$$\begin{aligned} f^{[-1]}\left(f(x)\right) = f\left(f^{[-1]}(x)\right) &= x, \\ f^{[-n]}(x) = (f^{[-1]})^{[n]}(x) &= (f^{[n]})^{[-1]}(x) \end{aligned}$$

wird.

Alle diese Iterationsstufen lassen sich gleichzeitig erklären, wenn man eine Funktion $\varphi(x)$ bestimmen kann, die der ABELschen Funktionalgleichung [1])

$$1 + \varphi(x) = \varphi\left(f(x)\right) \tag{3}$$

genügt: denn dann wird $k + \varphi(x) = \varphi\left(f^{[k]}(x)\right)$ und also

$$f^{[k]}(x) = \varphi^{[-1]}\left(k + \varphi(x)\right). \tag{4}$$

Eine solche Funktion $\varphi(x)$ leistet aber mehr: Sie liefert für gebrochenes $k$, solange ihre Umkehrung $\varphi^{[-1]}$ für $k + \varphi(x)$ erklärt ist, eine Schar stetig abgestufter Zwischenfunktionen zur Folge der Iterationen $f^{[n]}(x)$. Deswegen soll hier jede stetige umkehrbare Funktion $\varphi(x)$, die der ABELschen Gleichung (3) genügt, eine „Stufungsfunktion zu $f(x)$" heißen. Die nach (4) gebildeten Funktionen $f^{[k]}(x)$ heißen „Stufungen von $f(x)$", und zwar „Aufstufungen" für $k > 0$, „Abstufungen" für $k < 0$, „natürliche Stufungen", wenn $k$ einen Wert aus der Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... hat,

---

[1]) N. H. ABEL, Œuvres complètes, 2. éd., Christiania 1881, Bd. II, Nr. VI, S. 36–39.

„natürliche Abstufungen" für negativ ganzzahlige $k$, „Zwischenfunktionen" für gebrochenes $k$. Die Stufungsregeln (2) gelten dann für alle reellen $m$ und $n$, soweit die betreffenden Stufungen von $f(x)$ sich bilden lassen.

An Stelle der Hilfsfunktion $1 + u$, die in der ABELschen Gleichung auftritt, kann man auch $c \cdot u$ mit $0 \neq |c| \neq 1$ nehmen und gelangt so zu der SCHRÖDERschen Gleichung[2])

$$c \cdot \psi(x) = \psi(f(x)), \tag{5}$$

deren Lösung ebenfalls die Stufungen von $f(x)$ liefert:

$$f^{[k]}(x) = \psi^{[-1]}(c^k \cdot \psi(x)).$$

Zu analytischem $f(x)$ läßt sich ziemlich leicht eine analytische Lösung der SCHRÖDERschen Gleichung (5) finden, wenn man einen Ruhepunkt $z_0 = f(z_0)$ der Abbildung $z \to f(z)$ hat, in dem außerdem $0 \neq |f'(z_0)| \neq 1$ ist. Aber reelle Funktionen haben nicht immer reelle Ruhepunkte, wie schon das Beispiel $f(z) = e^z$ zeigt; die komplexen Ruhepunkte führen dann in der Regel nicht zu reellen (d. h. über der reellen Achse reellwertigen) Lösungen $\psi(x)$ von (5), und auch die daraus zu gewinnende Lösung $\varphi(x) = \log \psi(x) : \log c$ von (3) pflegt nicht reell zu sein. Die vielen und reichhaltigen Untersuchungen[3]) über die Iterationen analytischer Funktionen im Komplexen, die sich besonders eingehend mit der Natur der Ruhepunkte befassen, sind daher für eine Lösung der entsprechenden Aufgabe im Reellen ohne großen Nutzen. Erst neuerdings hat Herr KNESER nach ersten Ansätzen von BENNETT[4]) für die Funktion $e^z$ einen Weg gewiesen, um aus dem Komplexen eine auf der reellen Achse reelle und reguläre Lösung der ABELschen Gleichung zu gewinnen[5]).

---

[2]) E. SCHRÖDER, Math. Ann. **3** (1871), S. 296—322.

[3]) Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien einige der wichtigeren genannt, wobei insbesondere die Untersuchungen über wiederholte Mittelbildung aus mehreren Veränderlichen nicht berücksichtigt sind: M. A. KORKINE, Bull. Sci. Math. (2) **6**$_1$ (1882), S. 228—242; J. FARKAS, J. Math. pur. appl. (3) **10** (1884), S. 101—108; G. KŒNIGS, Bull. Sci. Math. (2) **7**$_1$ (1883), S. 340—357; C. R. Paris **99** (1884), S. 1016—1017; Ann. Ecol. norm. (3) **2** (1885), S. 385—404; L. LEAU; Ann. Toulouse **11** E, S. 1—110; P. FATOU, Bull. Soc. Math. France **47** (1919), S. 161—271; **48** (1920), S. 33—94, 208—314; J. Math. pur. appl. (9) **3** (1924), S. 1—49; G. JULIA, ebenda (8) **1** (1918), S. 47—245; Acta Math. **56** (1931), S. 149—195; **58** (1932), S. 407—412; P. MONTEL, Ann. Ecol. norm. (3) **50** (1933), S. 171—196; J. WOLFF, Bull. Soc. Math. France **57** (1929), S. 195—203; C. R. Paris **194** (1932), S. 833—834; G. VALIRON, Bull. Sci. Math. (2) **55** (1931), S. 105—128; H. CREMER, Jahresber. D. M. V. **33** (1925), S. 185—210; Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig **84** (1932), S. 291—324; Math. Ann. **110** (1935), S. 739—744; H. TÖPFER, Math. Ann. **117** (1940), S. 65—84.

[4]) A. A. BENNETT, Ann. of Math. (2) **17** (1915), S. 23—60, 74—75.

[5]) H. KNESER in einem Vortrage auf der Mathematiker-Zusammenkunft im Oktober 1942 in Freiburg i. Br. — Meine Kenntnis des Inhalts verdanke ich einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. KNESER.

Die nachstehenden, ganz im Reellen verlaufenden Ausführungen zeigen in § 2 für eine mit Rücksicht auf eindeutige Umkehrbarkeit ausgewählte Funktionenklasse $S$, daß es zu jeder stetigen reellen Funktion $f(x)$ aus $S$ mit endlichvielen oder unbeschränkt vielen stetigen Ableitungen eine reelle Lösung der Abelschen Gleichung mit denselben Stetigkeitseigenschaften gibt, die sich also vermöge (4) auf alle Stufungen von $f(x)$ übertragen. Zum Beweise werden im Anschluß an eine Methode, die Hurwitz bei linearen Differenzengleichungen benutzte [6]), Bernoullische Polynome verwendet. § 1 bringt vorbereitend die Abgrenzung der Klasse $S$ und einen Hilfssatz, § 3 den Konvergenzbeweis für vollableitbare reelle Funktionen. Aus einer in § 4 bewiesenen Determinantenformel für die Ableitungen der Zwischenfunktionen wird in § 5 eine Bedingung hergeleitet, welche die Stufungsfunktionen zu erfüllen haben, wenn Vollmonotonie von $f(x)$ bei der Bildung der Zwischenfunktionen erhalten bleiben soll.

## § 1.

## Vorbereitungen.

Erklärung 1. Eine Funktion $f(x)$ gehört zur Klasse $S$ („stufbare Funktionen"), wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1) $f(x)$ ist über einem Abschnitt $(a, b)$ der reellen Geraden als reelle stetige Funktion erklärt: $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$.

2) $f(x)$ ist in $(a, b)$ eine wachsende Funktion: für $a < x_1 < x_2 < b$ ist stets $f(x_1) < f(x_2)$.

3) In $(a, b)$ gilt $f(x) > x$.

4) Der Wertebereich von $f(x)$ deckt sich ganz oder zum Teil mit dem Erklärungsbereich: mit $\alpha = \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a+0)$, $\beta = \lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b-0)$ gilt $a \leqq \alpha < b \leqq \beta$.

Beispiele: $f(x) = e^x$ $(a = -\infty,\ \alpha = 0,\ b = \beta = +\infty)$; $f(x) = x + 1$ $(a = \alpha = -\infty,\ b = \beta = +\infty)$; $f(x) = e \cdot x$ $(a = \alpha = 0,\ b = \beta = +\infty)$; $f(x) = \arcsin x$ $\left(a = \alpha = 0,\ b = 1,\ \beta = \frac{\pi}{2}\right)$. Ist nur die dritte Bedingung nicht erfüllt, so kann man doch für jede reelle Funktion $f(x)$, für welche sich die durch $f(x) = x$ gegebenen Ruhepunkte nicht im Endlichen häufen, den Abschnitt $(a, b)$ so in Teile zerlegen, daß in jedem entweder $f(x) > x$ oder $f(x) < x$ gilt; in dem letzten Falle ist dann eben $f^{[-1]}(x) > x f$

[6]) A. Hurwitz, Acta Math. 20 (1897), S. 285–312.

Erklärung 2. Gehört $f(x)$ zu $S$, dann heißt eine Funktion $\varphi(x)$ eine ABELsche Stufungsfunktion (im folgenden kurz: Stufungsfunktion) zu $f(x)$, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

1) $\varphi(x)$ ist in $(\alpha, \beta)$ als reelle stetige Funktion erklärt;

2) $\varphi(x)$ ist in $(\alpha, \beta)$ eine steigende Funktion: für $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ ist stets $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$;

3) $\varphi(x)$ erfüllt für $x$ in $(a, b)$ die ABELsche Gleichung (3).

Durch diese Eigenschaften ist $\varphi(x)$ bei gegebenem $f(x)$ noch nicht eindeutig bestimmt. Eine nicht wesentliche Unbestimmtheit besteht darin, daß mit jedem $\varphi(x)$ auch $\varphi(x) + C$ eine Stufungsfunktion zu $f(x)$ ist. Diese Konstante läßt sich festlegen, indem man einen Punkt $x_0$ in $(a, b)$ wählt und dort $\varphi(x_0) = 0$ vorschreibt. Setzen wir weiter

$$f(x_0) = x_1, \quad f(x_{n-1}) = x_n = f^{[n]}(x_0), \tag{6}$$

so wird wegen (3)

$$\varphi(x_1) = 1, \quad \varphi(x_n) = n. \tag{7}$$

Der Abschnitt $(x_0, x_1)$ soll Hauptabschnitt von $\varphi(x)$ heißen. Daß auch durch die Vorschrift $\varphi(x_0) = 0$ die Stufungsfunktion noch nicht eindeutig festgelegt ist, lehrt

Satz 1. *Es sei $s(t)$ eine stetige reelle Funktion, die den drei Bedingungen genügt:*

1) $s(0) = 0$; 2) $s(t+1) = s(t) + 1$; 3) $s(t_1) < s(t_2)$ für $t_1 < t_2$.

*Ist dann weiter $\varphi(x)$ eine Stufungsfunktion zu der Funktion $f(x)$ aus $S$, so daß $\varphi(x_0) = 0$, dann ist auch $\psi(x) = s(\varphi(x))$ eine Stufungsfunktion zu $f(x)$ mit $\psi(x_0) = 0$; umgekehrt hat jede Stufungsfunktion, die bei $x_0$ verschwindet, die Form $s(\varphi(x))$, wobei $s(t)$ die drei obigen Bedingungen erfüllt.*

Der leicht zu führende Beweis dieses schon bekannten Satzes kann hier unterdrückt werden. Die darin auftretenden Substitutionen $s(t)$ haben also die Eigenschaft, daß $s(t) - t = h(t)$ eine periodische Funktion von $t$ mit der Periode 1 ist, welche für $t = 0$ verschwindet und niemals so rasch fällt, wie ihr Argument wächst: $h(0) = 0$, $h(t+1) = h(t)$, $h(t_2) - h(t_1) > -(t_2 - t_1) < 0$.

Aus den in der Erklärung 2 geforderten Eigenschaften einer Stufungsfunktion $\varphi(x)$ ergibt sich, daß sie eine eindeutige Umkehrung $\varphi^{[-1]}(x)$ hat, so daß sich die Zwischenfunktionen nach (4) eindeutig bilden lassen. Nur die natürlichen Stufungen und Abstufungen von $f(x)$ sind durch $f(x)$ allein bestimmt, die Zwischenfunktionen hängen noch von der Wahl der Stufungsfunktion ab. Die Aufstufungen $f^{[k]}(x)$ $(k > 0)$ sind in $\left(\alpha, f^{[-k]}(\beta)\right)$ erklärt, die Abstufungen $f^{[-k]}(x)$ $(k > 0)$ in $\left(f^{[k]}(\alpha), \beta\right)$.

Der Umfang des Wertebereichs der Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x)$,

$$\sigma_f = \lim_{y \to \beta} \varphi(y) - \lim_{x \to \alpha} \varphi(x) = \limsup_{a < x < y < \beta} \big(\varphi(y) - \varphi(x)\big),$$

heißt die „Stufbarkeit“ von $f(x)$; $f(x)$ ist „$\sigma_f$-fach stufbar“. Wenn nicht zugleich die beiden Ungleichungen $a < \alpha$, $b < \beta$ erfüllt sind, so ist $\sigma_f = \infty$; $f(x)$ heißt dann „voll stufbar“. Wenn $\varphi(x) \to +\infty$ für $x \to \beta$, so heißt $f(x)$ „voll aufstufbar“ (dies ist der Fall für $b = \beta$); ist $\varphi(x) \to -\infty$ für $x \to a$, so ist $f(x)$ „voll abstufbar“ (so bei $a = \alpha$). Bei endlichem $\sigma_f$ sind die Zwischenfunktionen $f^{[k]}(x)$ nur für $|k| < \sigma_f$ erklärt; für voll aufstufbare $f(x)$ ist $k$ nicht nach oben, für voll abstufbare nicht nach unten beschränkt. Ist $\sigma_f$ keine ganze Zahl, so hängt sein Wert noch in geringem Maße von der Wahl der Stufungsfunktion ab.

## § 2.

## Aufbau von Stufungsfunktionen für ableitbare $S$-Funktionen.

Ist $f(x)$ eine $S$-Funktion, dann kann man eine Stufungsfunktion dazu so herstellen: Man wählt ein $x_0$ in $(a. b)$, bestimmt $x_1$ nach (6), bildet für den Hauptabschnitt $x_0 \leqq x \leqq x_1$ die Funktion

$$\varphi_0(x) = t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{8}$$

und setzt sie in die angrenzenden Abschnitte $(x_1, x_2)$; $(x_2, x_3)$; ... und ebenso nach der anderen Seite mittels der Abelschen Gleichung fort. Insbesondere wird für $x_{-1} \leqq x \leqq x_0$, d. h. für $x_0 \leqq f(x) \leqq x_1$

$$\varphi_0(x) + 1 = \varphi_0\big(f(x)\big) = \psi_0(x) = \frac{f(x) - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{9}$$

Diese Funktion $\varphi_0(x)$ ist dann in $x_0$ (und daher, weil sie ihrer Herstellung nach die Abelsche Gleichung (3) erfüllt, in allen Nachfolgern und Vorgängern von $x_0$ ebenfalls) stetig, genügt also allen Vorschriften der Erklärung 2.

Eine Funktion mit stetigen Ableitungen beliebiger Ordnung möge fortan als „vollableitbar“ bezeichnet werden, in Anlehnung an Ausdrücke wie „vollmonoton“, „vollkonvex“. — Alle natürlichen Stufungen $f^{[n]}(x)$ sind offenbar zugleich mit $f(x)$ selbst $r$-mal stetig ableitbar oder vollableitbar. Das gibt Anlaß, dieselbe Eigenschaft auch von allen Zwischenfunktionen $f^{[k]}(x)$ zu fordern; und zwar auch hinsichtlich der Stufungszahl $k$. Hierzu ist es offenbar hinreichend, wenn die Stufungsfunktion $\varphi(x)$ dieselben Eigenschaften hat. Andererseits ist das auch notwendig, denn durch eine bestimmt gegebene Schar solcher Zwischenfunktionen $f_k(x)$, die den Stufungsgesetzen (2) folgen, ist nach (4) auch die Stufungsfunktion bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt: setzt man $\varphi(x_0) = 0$ und löst $f^{[k]}(x_0) = x$ nach $k$ auf: $k = \chi(x)$, so ist $\varphi(x) = \chi(x)$ die zugehörige Stufungsfunktion. Diese Forderung läßt sich erfüllen:

Satz 2. *Zu einer r-mal stetig ableitbaren (vollableitbaren) Funktion $f(x)$ aus $S$ gibt es stets eine r-mal stetig ableitbare (vollableitbare) Stufungsfunktion $\varphi(x)$; die damit nach* (4) *gebildeten Zwischenfunktionen $f^{[k]}(x)$ sind ebenfalls r-mal stetig ableitbar (vollableitbar).*

Ist dieser Satz bewiesen, dann folgt aus Satz 1 bei Verwendung einer ebensolchen Substitution $s(t)$, daß es unendlich viele solche Stufungsfunktionen gibt. Die gesuchte Stufungsfunktion wird nun gewonnen als Glied (für vollableitbares $f(x)$: als Grenzfunktion) einer Folge $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x), \ldots$ von Stufungsfunktionen zu $f(x)$, von der das Anfangsglied durch (8) gegeben ist und in der $\varphi_n(x)$ stetige Ableitungen bis zur $n$-ten Ordnung hat. Nach Satz 1 gilt dann:

$$\varphi_n(x) = s_n(\varphi_{n-1}(x)) = S_n(\varphi_0(x)), \tag{10}$$

$$S_0(t) = t, \quad S_n(t) = s_n(S_{n-1}(t)). \tag{10 a}$$

Dabei müssen $s_n(t)$ und $S_n(t)$ die drei Bedingungen von Satz 1 erfüllen, $s_n(t)$ muß stetige Ableitungen bis zur Ordnung $n-1$ haben, und die $n$-te Ableitung von $s_n(t)$ muß bei $t = 0$ einen Sprung von solcher Größe haben, daß der Sprung der $n$-ten Ableitung von $\varphi_{n-1}(x)$ an der Stelle $x_0$ in $\varphi_n(x)$ gerade aufgehoben ist.

Für diese Zwecke sind die Bernoullischen Polynome geeignet; es folge daher eine Zusammenstellung ihrer Erklärung und Eigenschaften[7]). Mit den Konstanten

$$\beta_n = \frac{B_n}{n!}, \quad \text{so daß also} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n u^n = \frac{u}{e^u - 1}, \tag{11}$$

werden die Funktionen $h_n(t)$ in $\langle 0, 1\rangle$ erklärt als die Bernoullischen Polynome mit dem Anfangswert 0, für $n > 1$ noch vermindert um ein Anfangsstück ihrer Fourierreihe, dessen Länge später bemessen werden soll:

$$\begin{aligned} &h_0(t) = t, \\ &h_{2n}(t; N) = \sum_{\lambda=1}^{2n+1} \frac{t^\lambda}{\lambda!} \cdot \beta_{2n+1-\lambda} + (-1)^n \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \frac{2 \sin 2\pi\nu t}{(2\pi\nu)^{2n+1}} \qquad (n \geqq 1), \\ &h_{2n+1}(t; N) = \sum_{\lambda=1}^{2n+2} \frac{t^\lambda}{\lambda!} \cdot \beta_{2n+2-\lambda} + (-1)^n \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \frac{2(1 - \cos 2\pi\nu t)}{(2\pi\nu)^{2n+2}} \quad (n \geqq 0). \end{aligned} \tag{12}$$

---

[7]) Vgl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin 1931, S. 541–542, 550–552; N. E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924.

Setzt man weiter

$$(13)\qquad C_k(N) = \beta_k - \cos\frac{k\pi}{2}\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\frac{2}{(2\pi\nu)^k}\qquad (k \geqq 1),$$

also $C_1(N) = -\frac{1}{2}$, $C_{2n+1}(N) = 0$ $(n > 0)$, dann folgt aus den bekannten Eigenschaften der Bernoullischen Funktionen:

$$(14)\quad \lim_{N\to\infty} C_n(N) = 0;\quad \lim_{N\to\infty} h_n(t;N) = 0 \;\text{ für } n > 1, \text{ gleichmäßig in } \langle 0,1\rangle.$$

Ferner ist

$$(15)\qquad h_n(0;N) = 0;$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k h_n(t;N)\Big|^{t=0} = C_{n+1-k}(N)\qquad (0 < k \leqq n);$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n+1} h_n(t;N)\Big|^{t=0} = \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin\pi t};$$

$$(16)\qquad h_n(t;N) = (-1)^{n+1}h_n(1-t;N);$$

$$(17)\qquad \left(\frac{d}{dt}\right)^k h_n(t;N)\Big|^{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\right)^k h_n(t;N)\Big|^{t=1}\qquad (0 \leqq k \neq n);$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n h_n(t;N)\Big|^{t=0} = -\frac{1}{2},\quad \left(\frac{d}{dt}\right)^n h_n(t;N)\Big|^{t=1} = +\frac{1}{2};$$

$$(18)\quad h_n'(t;N) = h_{n-1}(t;N) + C_n(N)\ \ (n > 0;\ \text{oder } n = 0,\ t \neq 0, 1, 2, \ldots).$$

Aus (18) folgt durch Integration von 0 bis 1 die Ungleichung

$$|C_n(N)| \leqq \max|h_{n-1}(t;N)|\qquad (0 \leqq t \leqq 1;\ n > 0)$$

und damit wegen (16):

$$(19)\qquad |h_n(t;N)| \leqq \max|h_{n-1}(t;N)|\qquad (0 \leqq t \leqq 1;\ n > 0).$$

Aus (18) folgert man weiter

$$|h_n'(t;N)| \leqq \max|h_{n-1}(t;N)|\cdot\frac{3+(-1)^n}{2};$$

weil nun aus (19) und (12) leicht

$$(20)\qquad |h_n(t;N)| \leqq \max|h_1(t;N)| < \frac{1}{\pi^2\cdot N}$$

zu bestätigen ist, so findet man für die Ableitungen die Abschätzung

$$(21)\qquad |h_n^{(k)}(t;N)| \leqq 2^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}\cdot\max|h_{n-k}(t;N)| \leqq 2^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}\cdot\frac{1}{\pi^2\cdot N}.$$

Wählt man nun die in (10) auftretende Substitution $s_n(t)$ in der Gestalt

$$(22)\quad s_n(t) = t + c_n\cdot h_n(t)\quad \text{mit } h_n(t) = h_n(t;N_n)\quad \text{für } 0 \leqq t \leqq 1,$$

wobei über die beiden Größen $c_n$ und $N_n$ noch passend verfügt werden kann, so erfüllt dieses $s_n(t)$ nach (15) die erste Bedingung von Satz 1. $\varphi_n(x)$ ist damit, wenn $\varphi_{n-1}(x)$ bereits festgelegt ist, im Hauptabschnitt $x_0 \leqq x \leqq x_1$

bestimmt; setzen wir $\varphi_n(x)$ in die angrenzenden Abschnitte funktional fort [das ist: mittels der Abelschen Funktionalgleichung (3)], so ergibt sich für $s_n(t)$ dabei eine Fortsetzung nach der Gleichung $s_n(t+1) = s_n(t) + 1$, also die zweite Bedingung von Satz 1. Um auch der dritten Bedingung Genüge zu tun, muß in $\langle 0, 1\rangle$

$$c_n \cdot h_n'(t; N_n) > -1 \tag{23}$$

gelten; darauf ist bei der Wahl von $c_n$ und $N_n$ Rücksicht zu nehmen. Daß die Ableitungen von $s_n(t)$ bis zur Ordnung $n-1$ stetig werden, ergibt die Formel (17). Jetzt gilt es, $c_n$ so zu bestimmen, daß auch die $n$-te Ableitung von $\varphi_n(x)$ stetig wird. Als Unstetigkeitsstellen kommen nur die Punkte $x_0$, $x_1$ usw. in Betracht; und ist die $n$-te Ableitung von $\varphi_n(x)$ an einer dieser Stellen stetig gemacht, dann ist sie vermöge der funktionalen Fortsetzung auch an allen anderen stetig, die Stetigkeit der $n$-ten Ableitung von $f(x)$ dabei vorausgesetzt.

Zur Abkürzung werde

$$\varphi_n\big(f(x)\big) = \psi_n(x) \quad \text{für } x_0 \leqq f(x) \leqq x_1 \tag{24}$$

gesetzt; diese Funktion $\psi_n(x)$ ist also jedenfalls in einer linksseitigen Umgebung $\langle x_0 - \delta,\ x_0\rangle$ des Punktes $x_0$ erklärt. Wird $\varphi_n(x)$ funktional über den Punkt $x_0$ nach links fortgesetzt, so entsteht dort nach (3) und (24) die Funktion $\psi_n(x) - 1$. Da ihre Werte links von $x_0$ nach (24) durch die Werte von $\psi_n(x)$ im Hauptabschnitt links von $x_1$ bestimmt sind, so schließt sie sich bei $x_0$ stetig an die Werte an, die $\varphi_n(x)$ im Hauptabschnitt rechts von $x_0$ annimmt: für $x = x_0$ wird von beiden Seiten her stetig der Wert 0 angenommen. Daß auch die Ableitungen bis zur $n$-ten Ordnung stetig sein sollen, wird durch die Gleichungen[8])

$$D^k \psi_n(x_0) - D^k \varphi_n(x_0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

gefordert. Im Falle $n = 1$ nehme man $N_1 = 0$, d. h.

$$h_1(t) = \tfrac{1}{2}(t^2 - t); \tag{26}$$

die Bedingung (25) ist dann durch

$$c_1 = 2\,\frac{1 - f'(x_0)}{1 + f'(x_0)} \tag{27}$$

zu erfüllen. Es wird dann

$$s_1'(t) = 2\,\frac{1 \cdot t + f'(x_0) \cdot (1 - t)}{1 + f'(x_0)},$$

[8]) Die im folgenden benutzten Bezeichnungen und Formeln sind zusammengestellt in der Mitteilung des Verf. „Die Kettenregel für höhere Ableitungen", Math. Zeitschr. **48** (1943), S. 735—746, weiterhin mit „K" angeführt.

also $s_1'(t) > 0$ in $\langle 0, 1 \rangle$; $s_1(t)$ erfüllt mithin auch die dritte Bedingung von Satz 1.

Angenommen jetzt, die Forderungen (25) seien für $1, 2, \ldots, n-1$ an Stelle von $n$ erfüllt. Sie lassen sich unter Beachtung von (22) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} D^k \psi_n(x_0) - D^k \varphi_n(x_0) &= \{D^k \psi_{n-1}(x_0) - D^k \varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ &\qquad + c_n \{D_x^k h_n(\psi_{n-1}(x_0)) - D_x^k h_n(\varphi_{n-1}(x_0))\} \\ &= \{D^k \psi_{n-1}(x_0) - D^k \varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ &\qquad + c_n \cdot \sum_{\nu=1}^{k} \{h_n^{(\nu)}(1) \cdot D_{k\nu} \psi_{n-1}(x_0) - h_n^{(\nu)}(0) \cdot D_{k\nu} \varphi_{n-1}(x_0)\}. \end{aligned}$$

Ist nun $k < n$, so verschwindet die erste Klammer nach Voraussetzung; in der zweiten (unter dem Summenzeichen) ist nach (17) für $\nu < n$ $h_n^{(\nu)}(1) = h_n^{(\nu)}(0)$, so daß übrigbleibt:

$$D^k \psi_n(x_0) - D^k \varphi_n(x_0) = c_n \cdot \sum_{\nu=1}^{k} h_n^{(\nu)}(0) \cdot \{D_{k\nu} \psi_{n-1}(x_0) - D_{k\nu} \varphi_{n-1}(x_0)\}.$$

Die in den Klammern rechter Hand stehenden Differentialausdrücke vom Grade $\nu$ und der Ordnung $k$ sind Produktsummen aus den Ableitungen erster bis $(k+1-\nu)$-ter Ordnung von $\psi_{n-1}$ und $\varphi_{n-1}$, wobei $k+1-\nu \leqq k \leqq n-1$ ist; diese stimmen an der Stelle $x_0$ nach Voraussetzung für die beiden Funktionen überein, so daß jede Klammer und damit die ganze rechte Seite verschwindet. Mithin ist $\varphi_n(x)$ bei funktionaler Fortsetzung samt seinen Ableitungen bis zur Ordnung $n-1$ stetig, und es bleibt nur noch der Fall $k = n$ zu untersuchen.

Die Stetigkeit der $n$-ten Ableitung läßt sich im allgemeinen nur durch bestimmte Wahl von $c_n$ erreichen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} D^n \psi_n(x_0) - D^n \varphi_n(x_0) &= \{D^n \psi_{n-1}(x_0) - D^n \varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ &\qquad + c_n \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \{h_n^{(\nu)}(1) \cdot D_{n\nu} \psi_{n-1}(x_0) - h_n^{(\nu)}(0) \cdot D_{n\nu} \varphi_{n-1}(x_0)\}. \end{aligned}$$

In der Summe ist für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ nach (17) $h_n^{(\nu)}(1) = h_n^{(\nu)}(0)$, hingegen für $\nu = n$ $h_n^{(n)}(1) = +\frac{1}{2}$, $h_n^{(n)}(0) = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} D^n \psi_n(x_0) - D^n \varphi_n(x_0) &= \{D^n \psi_{n-1}(x_0) - D^n \varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ &\qquad + c_n \cdot \{\tfrac{1}{2}(D_{nn} \psi_{n-1}(x_0) + D_{nn} \varphi_{n-1}(x_0)) + \\ &\qquad + \sum_{\nu=1}^{n-1} h_n^{(\nu)}(0) \cdot (D_{n\nu} \psi_{n-1}(x_0) - D_{n\nu} \varphi_{n-1}(x_0))\}. \end{aligned}$$

Weil nun in $D_{n\nu}$ nur die Ableitungen bis zur Ordnung $n+1-\nu$ auftreten, ist hierin nach Voraussetzung für $2 \leqq \nu \leqq n$ $D_{n\nu}\psi_{n-1}(x) = D_{n\nu}\varphi_{n-1}(x)$. Übrig bleibt daher

$$\begin{aligned} D^n\psi_n(x_0) - D^n\varphi_n(x_0) &= \{D^n\psi_{n-1}(x_0) - D^n\varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ &+ c_n\cdot\{D_{nn}\varphi_{n-1}(x_0) + h_n'(0)\cdot(D_{n1}\psi_{n-1}(x_0) - D_{n1}\varphi_{n-1}(x_0))\} \\ &= \{1 + c_n\cdot C_n(N_n)\}\{D^n\psi_{n-1}(x_0) - D^n\varphi_{n-1}(x_0)\} + c_n\cdot(\varphi_{n-1}'(x))^n. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck soll verschwinden; dazu muß man $c_n$ den Wert erteilen

$$\begin{aligned} (28\text{a}) \qquad c_n = &- \{D^n\psi_{n-1}(x_0) - D^n\varphi_{n-1}(x_0)\} \\ &: \{(\varphi_{n-1}'(x_0))^n + C_n(N_n)\cdot(D^n\psi_{n-1}(x_0) - D^n\varphi_{n-1}(x_0))\}. \end{aligned}$$

Wenn nicht schon zufällig $D^n\psi_{n-1} = D^n\varphi_{n-1}$ ist und daher $c_n = 0$ wird, so läßt sich dafür eine schönere Form finden:

$$(28\text{b}) \qquad \frac{1}{c_n} + C_n(N_n) + (\varphi_{n-1}'(x_0))^n : \{D^n\psi_{n-1}(x_0) - D^n\varphi_{n-1}(x_0)\} = 0.$$

$c_n$ hängt hiernach zwar noch von $N_n$ ab, strebt aber bei wachsendem $N_n$ wegen (14) und wegen $\varphi_{n-1}'(x) > 0$ gegen einen endlichen Grenzwert. Man kann in dieser Formel für $c_n$ noch den Einfluß der zu stufenden Funktion $f(x)$ von dem der bisher aufgebauten Substitution $S_{n-1}(t)$ trennen. Nach (10) und (24) ist

$$D^n\psi_k(x_0) - D^n\varphi_k(x_0) = \sum_{\nu=1}^{n}\{D^\nu S_k(1)\cdot D_{n\nu}\psi_0(x_0) - D^\nu S_k(0)\cdot D_{n\nu}\varphi_0(x_0)\}.$$

Nun folgt aus (8)

$$D_{n\nu}\varphi_0(x_0) = 0 \quad \text{für } 1 < \nu < n; \quad = (x_1 - x_0)^{-n} \quad \text{für } \nu = n,$$

und nach (8) und (24) wird

$$D_{n\nu}\psi_0(x_0) = \sum_{\mu=\nu}^{n} D_{n\mu}f(x_0)\cdot D_{\mu\nu}\varphi_0(x_1) = (x_1 - x_0)^{-\nu}\cdot D_{n\nu}f(x_0);$$

schreibt man also zur Abkürzung

$$(29) \qquad f_{n\nu} = (x_1 - x_0)^{n-\nu}\cdot D_{n\nu}f(x_0),$$

so nimmt (28b) diese Gestalt an:

$$(28\text{c}) \quad c_n = -1 : \{C_n(N_n) + (S_{n-1}'(0))^n : (\sum_{\nu=1}^{n} f_{n\nu}D^\nu S_{n-1}(1) - D^n S_{n-1}(0))\}.$$

Wird $c_n$ gemäß der Bedingung (28) gewählt, so ist die $n$-te Ableitung von $\varphi_n(x)$ überall stetig; damit außerdem $\varphi_n(x)$ stets zunehme bei wachsendem $x$, ist die Bedingung (23) einzuhalten. Wegen (18) und (14) kann man dafür durch Wahl eines hinreichend großen $N_n$ sorgen, weil dann die linke Seite von (23) beliebig nahe an Null herankommt. Die Abhängigkeit des $c_n$ von $N_n$

kann dabei nur verzögernd, aber nicht hindernd wirken, da $c_n$ bei wachsendem $N_n$ beschränkt bleibt.

So ist jetzt im Hauptabschnitt $(x_0, x_1)$ eine Folge von Stufungsfunktionen $\varphi_n(x)$ erklärt, die darüber hinaus nach der Abelschen Gleichung fortzusetzen sind; $\varphi_n(x)$ ist samt seinen Ableitungen bis zur $n$-ten Ordnung stetig. Wenn $f(x)$ stetige Ableitungen bis zur Ordnung $r$ hat, so läßt sich diese Folge der $\varphi_n(x)$ bis zum Gliede mit $n = r$ aufbauen. Für endlich-oft stetig ableitbare Funktionen $f(x)$ ist der Satz 2 damit bewiesen.

## § 3.

## Die Konvergenz bei vollableitbaren $S$-Funktionen.

Um für vollableitbare Funktionen $f(x)$ eine Stufungsfunktion mit der gleichen Eigenschaft zu erhalten, genügt es nicht, nur die Konvergenz der vorhin aufgebauten Folge $\{\varphi_n(x)\}$ zu zeigen, sondern man muß nachweisen, daß diese Grenzfunktion wachsend und vollableitbar ist; das ist jedenfalls dann der Fall, wenn für beliebiges $k$ die Folge der Ableitungen $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$ gleichmäßig konvergiert und die Ableitungen $\varphi_n'(x)$ einen positiven Grenzwert haben. Diese Anforderungen kann man in der Weise erfüllen, daß man eine konvergente Folge positiver Zahlen $\varepsilon_n$ annimmt:

$$\varepsilon_n > 0; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n < \infty \tag{30}$$

und dann die Zahlen $N_n$ so groß wählt, daß außer der Ungleichung (23) auch die Ungleichung

$$N_n > \frac{c_n}{\varepsilon_n}, \quad \text{also } \frac{c_n}{N_n} < \varepsilon_n \tag{31}$$

besteht; das ist wiederum trotz der Abhängigkeit des $c_n$ von $N_n$ möglich, weil $c_n$ bei wachsendem $N_n$ nicht unbeschränkt zunimmt.

Zunächst ist unter diesen Voraussetzungen die Folge $\varphi_n$ konvergent: denn

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \bigl(\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu-1}(x)\bigr) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu h_\nu\bigl(\varphi_{\nu-1}(x)\bigr),$$

und da die rechte Seite für $n \to \infty$ wegen (20), (31) und (30) gleichmäßig beschränkt ist, so ist die Grenzfunktion $\Phi(x)$ vorhanden:

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu h_\nu\bigl(\varphi_{\nu-1}(x)\bigr). \tag{32}$$

Auch die Folge der ersten Ableitungen konvergiert: Es ist

$$\varphi_n'(x) = \varphi_0'(x) \cdot \prod_{\nu=1}^{n} s_\nu'\bigl(\varphi_{\nu-1}(x)\bigr) = \varphi_0'(x) \cdot \prod_{\nu=1}^{n} \{1 + c_\nu h_\nu'\bigl(\varphi_{\nu-1}(x)\bigr)\},$$

und dieses Produkt konvergiert für $n \to \infty$ absolut und gleichmäßig in $\langle x_0, x_1 \rangle$, weil es die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cdot h'_\nu \left(\varphi_{\nu-1}(x)\right) \cdot$$

nach (21), (31), (30) tut. Für die Ableitung der Grenzfunktion erhält man also den Ausdruck

$$\Phi'(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi'_n(x) = \varphi'_0(x) \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \{1 + c_\nu h'_\nu(\varphi_{\nu-1}(x))\}.$$

Wenn

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + |c_\nu| \cdot \max_{0<t<1} |h'_\nu(t)|) = A \tag{33}$$

gesetzt wird, so ist für alle $n$ und für $t$ in $\langle 0, 1 \rangle$

$$0 < S'_n(t) < A < \infty. \tag{34}$$

Wegen der Konvergenz des Produktes ist der Grenzwert $\Phi'(x)$ von Null verschieden, und zwar positiv als Grenzwert der positiven Größen $\varphi'_n(x)$. $\Phi(x)$ ist also eine wachsende Funktion.

Es bleibt noch die Konvergenz der höheren Ableitungen zu untersuchen. Die $k$-te Ableitung von $\varphi_n$ ist

$$D^k \varphi_n(x) = D^k_x S_n(\varphi_0(x)) = \sum_{\lambda=1}^{k} D^\lambda S_n(\varphi_0(x)) \cdot D_{k\lambda} \varphi_0(x);$$

weil nun $\varphi_0(x)$ linear in $x$ ist, so zieht sich die Summe auf das Glied mit $\lambda = k$ zusammen:

$$D^k \varphi_n(x) = D_{kk} \varphi_0(x) \cdot D^k S_n(t),$$

und zu prüfen ist, ob der zweite Faktor für $n \to \infty$ gleichmäßig in $\langle 0, 1 \rangle$ konvergiert. Nun ist wegen (10a)

$$D^k S_n(t) = \sum_{(\lambda)} D_{\lambda_0 \lambda_1} s_1 \cdot D_{\lambda_1 \lambda_2} s_2 \ldots D_{\lambda_{n-1} \lambda_n} s_n, \tag{35}$$

zu erstrecken über alle $\binom{n+k-2}{k-1}$ verschiedenen Zusammenstellungen $(\lambda) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, welche mit den Ungleichungen

$$k = \lambda_0 \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_{n-1} \geqq \lambda_n = 1$$

verträglich sind. Demnach ist auch

$$|D^k S_n| \leqq \sum_{(\lambda)} |D_{\lambda_0 \lambda_1} s_1| \ldots |D_{\lambda_{n-1} \lambda_n} s_n|. \tag{36}$$

Hierin bedeutet nach der Formel von Faa di Bruno

$$D_{\mu\nu} s = \sum_{(\eta)} \mu! \frac{1}{\eta_1!} (s')^{\eta_1} \cdot \frac{1}{\eta_2!} \left(\frac{s''}{2!}\right)^{\eta_2} \cdot \frac{1}{\eta_3!} \left(\frac{s'''}{3!}\right)^{\eta_3} \cdots,$$

zu erstrecken über alle Zusammenstellungen $(\eta) = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ aus ganzen nichtnegativen Zahlen, für welche die beiden Bedingungen erfüllt sind

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots = \nu; \quad 1\,\eta_1 + 2\,\eta_2 + 3\,\eta_3 + \cdots = \mu.$$

Mit $D^*_{\mu\nu}\, s$ werde nun der Ausdruck bezeichnet, den man aus $D_{\mu\nu}\, s$ erhält, wenn man in dieser Darstellung die erste Ableitung $s'$ durch 1, alle höheren Ableitungen durch ihren Betrag ersetzt. Es ist also

$$(37) \qquad D^*_{\mu\nu}\, s = \sum_{(\eta)} \mu! \cdot \frac{1}{\eta_1!} \cdot \frac{1}{\eta_2!} \left(\frac{1}{2!} |s''|\right)^{\eta_2} \cdot \frac{1}{\eta_3!} \left(\frac{1}{3!} |s'''|\right)^{\eta_3} \cdots,$$

worin die Summe über dieselben Zusammenstellungen $(\eta)$ auszudehnen ist. Dann gilt offenbar die Abschätzung

$$|D_{\lambda_{\nu-1}\lambda_\nu} s_\nu| \leqq (1 + |c_\nu\, h_\nu(t)|)^k \cdot D^*_{\lambda_{\nu-1}\lambda_\nu}\, s_\nu.$$

Hier ist der zweite Faktor nur dann von 1 verschieden, wenn $\lambda_{\nu-1} > \lambda_\nu$. Bei einer bestimmten Zusammenstellung $(\lambda)$ ist das höchstens $(k-1)$-mal der Fall; die betreffenden Faktoren dieses Gliedes in (35) seien $\ldots D_{\alpha\beta}\, s_\mu$ $\ldots D_{\beta\gamma}\, s_\nu \ldots$, wobei $\ldots < \mu < \nu < \cdots$ und $\cdots > \alpha > \beta > \gamma > \cdots$ sein muß. Das entsprechende Glied auf der rechten Seite von (36) läßt sich dann abschätzen durch

$$|D_{\lambda_0\lambda_1} s_1| \ldots |D_{\lambda_{n-1}\lambda_n} s_n| \leqq \prod_{\nu=1}^{n} (1 + |c_\nu\, h_\nu|)^k \{\ldots D^*_{\alpha\beta}\, s_\mu \cdot D^*_{\beta\gamma}\, s_\nu \ldots\}.$$

Dieselbe Zeigerfolge $(n, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots 1)$ kommt nun in (36) mit allen möglichen Folgen $(\ldots, \mu, \nu, \ldots)$ vor, für welche die Ungleichungen gelten $(1 \leqq) \cdots < \mu < \nu < \cdots (\leqq n)$. Berücksichtigt man noch alle (der Anzahl nach $2^{k-2}$) verschiedenen Zeigerfolgen $(\ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, so erhält man sämtliche Glieder von (36). Mithin fließt aus (36) die Abschätzung

$$|D^k S_n| \leqq \prod_{\nu=1}^{n} (1 + |c_\nu\, h_\nu|)^k \cdot \sum_{\ldots\alpha,\beta\ldots} \; \sum_{\ldots\mu<\nu\ldots} \{\cdots D^*_{\alpha\beta}\, s_\mu \cdot D^*_{\beta\gamma}\, s_\nu \cdots\}.$$

Die rechte Seite wird weiter vergrößert, wenn man die einschränkenden Bedingungen $\cdots < \mu < \nu < \cdots$ fallen läßt; dann kann jeder Faktor für sich summiert werden. In Verbindung mit (34) folgt nun

$$(38) \qquad |D^k \varphi_n(x)| \leqq A^k \cdot \sum_{\ldots\alpha,\beta\ldots} \ldots \left(\sum_\nu D^*_{\alpha\beta}\, s_\nu\right) \left(\sum_\nu D^*_{\beta\gamma}\, s_\nu\right) \ldots.$$

Der Faktor von $A^k$ ist eine Summe von $2^{k-2}$ Produkten aus je höchstens $k-1$ Faktoren der Form $\sum_\nu D^*_{\alpha\beta}\, s_\nu$; wenn bei $n \to \infty$ diese Faktoren konvergieren, dann auch die linke Seite von (38). Und da zufolge (21), (30), (31) eine Summe wie

$$\sum_\nu |s_\nu^{(m)}(\varphi_{\nu-1}(x))|$$

für $m > 1$ gleichmäßig in $\langle x_0, x_1 \rangle$ konvergent ist, so gilt das erst recht für eine Summe über Produkte von höheren Ableitungen der $s$, wie sie die Faktoren $\sum D^*_{\alpha\beta}\, s_\nu$ in (38) nach (37) darstellen.

Die Folge der $k$-ten Ableitungen $D^k \varphi_n(x)$ konvergiert also absolut und gleichmäßig in $\langle x_0, x_1 \rangle$, strebt mithin gegen die (hiernach vorhandene) $k$-te Ableitung der Grenzfunktion $\Phi(x)$: d. h. $\Phi(x)$ ist vollableitbar. Da alle $\varphi_n(x)$ die ABELsche Gleichung (3) erfüllen, so trifft sie auch für $\Phi(x)$ zu. $\Phi(x)$ ist also eine vollableitbare Stufungsfunktion für das (dabei gleichfalls vollableitbar vorausgesetzte) $f(x)$; ihre Werte sind aus denen im Hauptabschnitt nach einer der Formeln

$$\varphi\left(f^{[m]}(x)\right) = \varphi(x) \quad \text{für alle ganzen } m \text{ und } x_0 \leqq x \leqq x_1,$$

oder anders geschrieben:

$$\varphi(x) = m + \varphi\left(f^{[-m]}(x)\right) \quad \text{für alle ganzen } m \text{ und } x_m \leqq x \leqq x_{m+1}$$

zu berechnen. Satz 2 ist damit vollständig bewiesen. Von dieser Funktion $\varphi(x)$ kann man nach Satz 1 mit einer gleichfalls vollableitbaren Substitution $s(t)$ zu jeder anderen vollableitbaren Stufungsfunktion für $f(x)$ gelangen.

## § 4.

## Die Ableitungen der Zwischenfunktionen, ausgedrückt durch die Ableitungen der Stufungsfunktion.

Es sei $\varphi(x)$ eine mehrfach ableitbare Stufungsfunktion zu $f(x)$. Die Zwischenfunktion $k$-ter Stufe $f^{[k]}(x)$ ist dann durch (4) erklärt; diese Beziehung läßt sich zerlegen in

$$y = f^{[k]}(x); \quad y = \varphi^{[-1]}(z); \quad z = k + u; \quad u = \varphi(x).$$

Die $n$-te Ableitung von $f^{[k]}(x)$ wird, falls vorhanden, gegeben durch

$$D^n f^{[k]}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi^{[-1](\nu)}(z) \cdot D_{n\nu}\, \varphi(x). \tag{39}$$

Von den beiden Funktionen $\varphi^{[-1]}$ und $\varphi$, deren Ableitungen rechts vorkommen, läßt sich die zweite entbehren. Dazu wende man auf die Identität $x = \varphi^{[-1]}(\varphi(x))$ die Operatoren $D_{n\lambda}$ an $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$:

$$0 = \sum_{\nu=\lambda}^{n} D_{n\nu}\, \varphi(x) \cdot D_{\nu\lambda}\, \varphi^{[-1]}(u) \quad (\lambda = 1, \ldots, n-1);$$

$$1 = D_{nn}\, \varphi(x) \cdot D_{nn}\, \varphi^{[-1]}(u).$$

Mit (39) sind das $n+1$ Gleichungen für die $n$ Größen $D_{n\nu}\varphi(x)$, und die Determinante verschwindet daher. Daraus folgt[9])

$$D^n f^{[k]}(x) = (-1)^{n+1}\cdot\left(\varphi^{[-1]\prime}(u)\right)^{-\binom{n+1}{2}}\cdot \operatorname{Det}|A_{ik}| \quad (i, k = 0, \ldots n-1)$$

mit den Elementen

$$A_{ik} = D_{i+1,1}\,\varphi^{[-1]}(z) \quad \text{für } k = 0;\quad A_{ik} = D_{i+1,k}\,\varphi^{[-1]}(u)$$
$$\text{für } 1 \leqq k \leqq i+1;\quad A_{ik} = 0 \quad \text{für } i+1 < k \leqq n-1.$$

Die Spalten $k = 2, \ldots n-1$ dieser Determinante lassen sich durch geeignete Linearkombinationen in Spalten mit Ableitungsoperatoren nur ersten Grades überführen[10]), so daß man erhält

$$\text{(40 a)}\quad D^n f^{[k]}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)!}\cdot\left(\varphi^{[-1]\prime}(u)\right)^{-2n+1}\cdot \operatorname{Det}|C_{ik}^{(n)}| \quad (i, k = 0, \ldots n-1),$$

wobei die Elemente dieser Determinante sind

$$\text{(40 b)}\quad C_{ik}^{(n)} = D^{i+1}\varphi^{[-1]}(z) \quad \text{für } k = 0;\quad C_{ik}^{(n)} = 0 \quad \text{für } i+1 < k \leqq n-1;$$
$$C_{ik}^{(n)} = \alpha_{ik}^{(n)}\cdot D^{i-k+2}\varphi^{[-1]}(u) \quad \text{für } 1 \leqq k \leqq i+1$$

mit

$$\text{(40 c)}\quad \alpha_{ik}^{(n)} = 1 \quad \text{für } k = 1;\quad \alpha_{ik}^{(n)} = n\cdot\binom{i}{k-1} - \binom{i+1}{k-1} \quad \text{für } 2 \leqq k \leqq i+1.$$

Es ist ebensowohl möglich, in (39) $\varphi^{[-1]}(x)$ zugunsten von $\varphi(x)$ auszuscheiden. Eine solche nur die Ableitungen von $\varphi(x)$ enthaltende Darstellung in Determinantenform läßt sich erhalten, indem man die Operatoren $D_{\lambda 1}$ auf die Gleichung $y = \varphi^{[-1]}\left(\varphi(y)\right)$ anwendet:

$$1 = \varphi^{[-1]\prime}(z)\cdot\varphi'(y);$$
$$0 = \sum_{\nu=1}^{\lambda}\varphi^{[-1](\nu)}(z)\cdot D_{\lambda\nu}\,\varphi(y) \quad (\lambda = 2, \ldots, n).$$

Es kommt dann heraus

$$\text{(41 a)}\quad D^n f^{[k]}(x) = (-1)^{n+1}\cdot\left(\varphi'(y)\right)^{-\binom{n+1}{2}}\cdot \operatorname{Det}|B_{ik}^{(n)}| \quad (i, k = 1, \ldots, n)$$

mit

$$\text{(41 b)}\quad B_{ik}^{(n)} = D_{i+1,k}\,\varphi(y) \quad \text{für } 1 \leqq i \leqq n-1,\ 1 \leqq k \leqq i+1;$$
$$B_{ik}^{(n)} = 0 \quad \text{für } i+1 < k \leqq n;\quad B_{ik}^{(n)} = D_{nk}\,\varphi(x) \quad \text{für } i = n.$$

Diese Determinante läßt sich jedoch nicht weiter vereinfachen.

---

[9]) Diese Darstellung ist in anderer Bezeichnung schon öfters angegeben worden, z. B. von F. G. Teixeira, Giorn. mat. Battaglini 18 (1880), S. 301–309.

[10]) Nach Fortlassung der in der obersten Zeile stehenden Nullen stimmen diese Spalten völlig mit denen der Determinante in K (15) überein; es lassen sich also hier dieselben Umformungen anwenden, die dort zur Determinante (19) führen.

## § 5.

## Zur Stufung vollmonotoner Funktionen.

Eine Funktion $g(x)$ pflegt „$r$-fach monoton“ bzw. „vollmonoton“ genannt zu werden, wenn das Vorzeichen ihrer Ableitungen für $n = 1, 2, \ldots r$ bzw. für alle $n = 1, 2, \ldots$ durch die Ungleichungen $(-1)^n \cdot D^n g(x) > 0$ bestimmt ist. Im folgenden handelt es sich um Funktionen, deren Ableitungen positiv sind und $(r-1)$-fach bzw. vollmonoton. Dafür eine kurze Bezeichnung:

Erklärung 3. Eine Funktion $f(x)$ heißt „$r$-fach monoton steigend“ bzw. „vollmonoton steigend“, wenn sie $r$-mal stetig ableitbar bzw. vollableitbar ist und für $n = 1, \ldots, r$ bzw. für alle $n = 1, 2, \ldots$ gilt $(-1)^n \cdot D^n f(x) < 0$.

Über solche Funktionen gilt

Satz 3. *Sind $f(x)$ und $g(x)$ $r$-fach (bzw. voll-) monoton steigende Funktionen, so trifft dies auch für $h(x) = f(g(x))$ zu.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Formel $D^n h(x) = \sum_{\nu=1}^{n} D^\nu f(g) \cdot D_{n\nu} g(x)$, weil nach der Voraussetzung $D^\nu f(g)$ das Zeichen $(-1)^{\nu-1}$ und $D_{n\nu} g(x)$ das Zeichen $(-1)^{n-\nu}$ hat (man beachte die Formel von Bruno!). — Aus Satz 3 fließt sogleich

Satz 4. *Ist $g(x)$ eine $r$-fach (bzw. voll-) monoton steigende Funktion, dann sind es auch alle natürlichen Stufungen von $g(x)$.*

Aus dieser Feststellung entspringt nun die Forderung, daß auch alle Zwischenfunktionen positiver Stufe, also alle „Aufstufungen“ von $g(x)$, ebenso wie $g(x)$ selbst $r$-fach monoton oder vollmonoton steigen sollen. Nun hat man ferner [11])

Satz 5. *Ist $g(x)$ $r$-fach (bzw. voll-) monoton steigend, so sind die Ableitungen von $g^{[-1]}(x)$ bis zur Ordnung $r$ (bzw. jeder Ordnung) positiv.*

Um auch bei unendlichem Grundabschnitt ($b = +\infty$) nicht zur dritten Eigenschaft einer $S$-Funktion (Erkl. 1) in Widerspruch zu geraten, sei im folgenden angenommen, daß $g(x)$ $r$-fach (oder voll-) monoton steige und daß $g^{[-1]}(x)$ zur Klasse $S$ gehöre, also $g(x) < x$ sei. Welche besonderen Eigenschaften muß dann die Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $g^{[-1]}(x)$ aufweisen, damit die obige Forderung erfüllt werde? Aus Formel (41) läßt sich sofort antworten:

---

[11]) Der Beweis läßt sich, ähnlich wie oben der für Satz 3, mit der Formel K (21) ühren.

Satz 6. *$f(x)$ gehöre zu $S$, $f^{[-1]}(x)$ steige vollmonoton, $\varphi(x)$ sei eine vollmonotone Stufungsfunktion zu $f(x)$. Damit dann die durch diese Stufungsfunktion zu bildenden Aufstufungen von $f^{[-1]}(x)$, das sind die Zwischenfunktionen $f^{[k]}(x)$ mit $k < 0$, gleichfalls vollmonoton steigen, ist es notwendig und hinreichend, daß $\varphi(x)$ die Bedingungen*

$$\operatorname{Det}|B_{ik}^{(n)}| > 0 \quad (i, k = 1, \ldots, n) \quad \textit{für alle Paare } (x, y) \textit{ mit } x > y$$

*für $n = 2, 3, \ldots$ erfülle. — Ersetzt man „vollmonoton" durch „$r$-fach monoton", so sind diese Bedingungen nur für $n = 2, 3, \ldots r$ zu stellen.*

Hier werden also die Ableitungen der Stufungsfunktion an zwei Stellen $x$ und $y = f^{[k]}(x)$ miteinander verknüpft. Doch vermag man diese Bedingungen so umzugestalten, daß nur die Ableitungen an einer Stelle darin auftreten. Für $x = y$ verschwindet die Determinante, weil die beiden letzten Zeilen dann übereinstimmen. Zieht man nun von der letzten Zeile die vorletzte ab, teilt durch die positive Größe $x - y$ und geht zur Grenze $x \to y$ über, so entsteht in der letzten Zeile die Ableitung der vorletzten. Der Wert dieser neuen Determinante kann als Grenzwert positiver Werte nicht negativ sein; daher muß die Stufungsfunktion notwendig die Ungleichungen

$$(42) \qquad \operatorname{Det}|E_{ik}^{(n)}| \geqq 0 \quad (i, k = 1, \ldots, n;\ n = 2, 3, \ldots)$$

mit

$$E_{ik}^{(n)} = D_{i+1,k}\,\varphi(x) \quad \text{für } 1 \leqq i \leqq n-1,\ 1 \leqq k \leqq i+1;$$
$$E_{ik}^{(n)} = 0 \quad \text{für } i+2 \leqq k \leqq n; \quad E_{ik}^{(n)} = D\big(D_{nk}\,\varphi(x)\big) \quad \text{für } i = n$$

befriedigen. Diese Determinanten lassen sich aber noch vereinfachen. Für jede genügend oft ableitbare Funktion $\varphi(x)$ gilt [12])

$$(43) \qquad D_{i+1,k}\,\varphi = \sum_{\lambda=k}^{i+1} D_{\lambda-1,k-1}\,\varphi \cdot \binom{i}{\lambda-1} D_{i-\lambda+2,1}\,\varphi \quad (i+1 \geqq k > 1).$$

Nun ist $\binom{i}{\lambda-1} = 0$ für $1 \leqq i \leqq n-1$, wenn $\lambda > i+1$. Die Formel (43) kann also für alle Fälle mit $1 \leqq i \leqq n-1$, $2 \leqq k \leqq n$ angewandt werden. Für $i = n$ bringe man das letzte Glied ($\lambda = i+1 = n+1$) mit auf die linke Seite und hat dann für $i = n$, $2 \leqq k \leqq n$:

$$(44) \qquad D(D_{nk}\,\varphi) = D_{n+1,k}\,\varphi - D_{n,k-1}\,\varphi \cdot D_{11}\,\varphi$$
$$= \sum_{\lambda=k}^{n} D_{\lambda-1,k-1}\,\varphi \cdot \binom{n}{\lambda-1} D_{n-\lambda+2,1}\,\varphi.$$

Erklärt man jetzt

$$F_{ik} = \binom{i}{k-1} D^{i-k+2}\,\varphi(x),$$

---

[12]) Folgt aus K(13), wenn dort $k, \varkappa, n, \nu$ durch $i+1$, $\lambda-1$, $k$, $1$ ersetzt werden.

so lassen sich nach (43) und (44) alle Elemente von (42) aus diesen neuen Größen zusammensetzen nach der Formel[13])

$$E_{ik}^{(n)} = \sum_{\lambda=1}^{n} D_{\lambda-1,k-1}\,\varphi(x)\cdot F_{i\lambda} \quad (i,k=1,\ldots,n).$$

Da in dieser Summe der erste Faktor nicht von der Zeilennummer $i$ abhängt, so sind die Spalten $E_{ik}^{(n)}$ linear aus den Spalten $F_{ik}$ zusammengesetzt. Nach Unterdrückung einer Potenz des stets positiven Faktors $\varphi'(x)$ bleibt an Stelle von (42) als notwendige Bedingung, daß Det $|F_{ik}| \geqq 0$ sein muß. Das ist

Satz 7. *$f(x)$ gehöre zu $S$; $f^{[-1]}(x)$ steige vollmonoton. Wenn auch alle Aufstufungen von $f^{[-1]}(x)$ vollmonoton steigen sollen, so muß die Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x)$ die Bedingungen erfüllen*

$$\text{(45)} \qquad \operatorname{Det}\left|\binom{i}{k-1}\cdot D^{i-k+2}\varphi(x)\right| \geqq 0 \quad (i,k=1,\ldots,n;\; n=2,3,\ldots).$$

Im Falle $r$-fach monotonen Steigens ist (45) nur für $n = 2, \ldots r$ zu fordern. — Ob das Gleichheitszeichen wirklich eintreten kann, ist noch nicht ausgemacht. Läßt man es aber fort, so erhält man eine hinreichende Bedingung:

Satz 8. *$f(x)$ sei eine $S$-Funktion. Die Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x)$ erfülle die Bedingungen*

$$\text{(46)} \qquad \operatorname{Det}\left|\binom{i}{k-1} D^{i-k+2}\varphi(x)\right| > 0 \quad (i,k=1,\ldots,n;\; n=2,3,\ldots)$$

*Dann steigen alle Abstufungen von $f(x)$ vollmonoton.*

Beweis. Es sei $\langle c, d\rangle$ ein abgeschlossener Teilabschnitt des Grundabschnitts $(\alpha, \beta)$, in welchem $\varphi(x)$ erklärt ist, und $N(>1)$ eine ganze Zahl. Sind die Ungleichungen erfüllt, so sind für $x = y$, $x$ in $\langle c, d\rangle$ alle Ableitungen der Det $|B_{ik}^{(n)}|$ von Satz 6 positiv: $\frac{\partial}{\partial x}$ Det $|B_{ik}^{(n)}|\,(y,x)|^{x=y} > 0$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, so daß diese Ungleichungen für $n \leqq N$ auch noch für $c \leqq y \leqq x \leqq d$, $0 \leqq x - y \leqq \varepsilon$ erfüllt sind. Da nun Det $|B_{ik}^{(n)}|\,(y,y) = 0$, so folgt Det $B_{ik}^{(n)}|\,(y,x)| > 0$ für $c \leqq y < x \leqq y + \varepsilon \leqq d$, $n \leqq N$. Nach Satz 6 sind dann für $0 < k \leqq \varepsilon$, $f^{[k]}(c) \leqq x \leqq d$ die Zwischenfunktionen $f^{[-k]}(x)$ $N$-fach monoton steigend. Aus Satz 3 in Verbindung mit dem ersten der Stufungsgesetze (2) ergibt sich weiter, daß alle im Abschnitt $\langle c, d\rangle$ zu bildenden Abstufungen von $f(x)$ $N$-fach monoton steigen, d. h. alle $f^{[-k]}(x)$ mit $0 < k < \varphi(d) - \varphi(c)$. In dieser Feststellung kommt die Zahl $N$ nicht mehr vor (in der vorhergehenden noch, weil $\varepsilon$ im

[13]) Dabei ist zu bedenken, daß nach K (7) $D_{00}\varphi = 1$; $D_{10}\varphi = D_{20}\varphi = \cdots = 0$.

allgemeinen von $N$ abhängen wird); sie gilt also für jedes $N$, und das bedeutet Vollmonotonie: $f^{[-k]}(x)$ steigt vollmonoton für $0 < k < \varphi(d) - \varphi(c)$, $f^{[k]}(c) \leqq x \leqq d$. Nun kann der Teilabschnitt $\langle c, d\rangle$ innerhalb von $(a, \beta)$ beliebig groß gewählt werden, so daß in der letzten Behauptung $(a, \beta)$ an Stelle von $\langle c, d\rangle$ gesetzt werden darf. Somit ist festgestellt: $f^{[-k]}(x)$ steigt vollmonoton für $0 < k < \sigma_f$, $f^{[k]}(a) < x < \beta$. Damit ist Satz 8 bewiesen.

In Satz 6 ist die Voraussetzung, daß $f^{[-1]}(x)$ vollmonoton steigen solle, offenbar notwendig, damit $\varphi(x)$ den dort angegebenen Ungleichungen genügen kann. Es ist anzunehmen, daß diese Voraussetzung auch ausreichend ist, daß also folgende Vermutung wahr ist:

Vermutung 1. Wenn $f(x)$ zu $S$ gehört und $f^{[-1]}(x)$ vollmonoton steigt, so gibt es genau eine Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x)$, welche die Ungleichungen von Satz 6 (bzw. Satz 8) erfüllt.

Gleichbedeutend damit ist die zweite Vermutung, die zunächst weniger zu besagen scheint [14]):

Vermutung 2. Steigt $g(x)$ vollmonoton, dann gibt es genau eine vollmonoton steigende Funktion $h(x)$, so daß $h^{[2]}(x) = h\big(h(x)\big) = g(x)$.

Daß V. 2 aus V. 1 folgt, ist klar. Umgekehrt: Nach Wahl des Nullpunktes $x_0$ für die Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x) = g^{[-1]}(x)$ sind alle Abszissen $x_n$ zu den Ordinaten $\varphi(x_n) = n$ festgelegt. Trifft nun die Vermutung 2 zu, so sind auch durch $x_{n-0,5} = h(x_n)$ die Abszissen zu den Ordinaten $n - 0{,}5 = \varphi(x_{n-0,5})$ eindeutig festgelegt, also insgesamt alle Abszissen zu den Ordinaten $\varphi(x) = m \cdot 2^{-1}$, wo $m$ irgendeine ganze Zahl ist. Bildet man jetzt nach Vermutung 2 die durch $h_2\big(h_2(x)\big) = h(x)$, also $h_2^{[4]}(x) = g(x)$ bestimmte vollmonoton steigende Funktion $h_2(x)$, so lassen sich durch diese weiter die Abszissen zu allen Ordinaten $m \cdot 2^{-2}$ berechnen. Durch Wiederholung dieses Schlusses ergibt sich, daß die Abszissen zu allen Ordinaten $m \cdot 2^{-n}$ festliegen. Da nun diese Dualbrüche überall dicht liegen, so ist $\varphi(x)$ wegen seiner Stetigkeit überall erklärt und hat dabei die Eigenschaft, daß die daraus zu bildenden Abstufungen $f^{[-k]}(x)$ jedenfalls für $k = m \cdot 2^{-n}$ ($m, n$ natürliche Zahlen) vollmonoton steigen. Weil aber $f^{[-k]}(x)$ zufolge (4) auch in $k$ stetig ist, so kommt diese gewünschte Eigenschaft allen Abstufungen $f^{[-k]}(x)$ mit $k > 0$ zu. Es genügt also, nach Vermutung 2 eine Funktion $g(x)$ eindeutig vollmonoton zur Hälfte stufen zu können, damit es zu $g^{[-1]}(x)$ eine Stufungsfunktion gibt, die den Bedingungen

[14]) Für die Funktion $g(x) = \log \operatorname{nat} x$, auf welche die Voraussetzung der Vermutung 2 zutrifft, haben Herr Prof. MEIDELL und Herr Dr. GOTAAS (Oslo) eine sechsstellige Tafel der Funktion $g^{[0,5]}(x) = \operatorname{hln} x$ („Halblogarithmus") auf Grund dieser Monotonieforderungen berechnet.

von Satz 7 (bzw. Satz 8) genügt — und umgekehrt. Da vollmonotone Funktionen analytisch sind [15]), so ergäbe sich dann auch eine ausgezeichnete analytische Stufungsfunktion. Ob es allgemein zu reellen analytischen $S$-Funktionen jeweils eine ausgezeichnete analytische Stufungsfunktion gibt, entsprechend den „Hauptlösungen" der linearen Differenzengleichungen, ist wohl noch nicht entschieden — an sich lassen sich nach Satz 1 aus einer analytischen Stufungsfunktion unendlich viele herstellen, wenn nur die Substitution $s(t)$ analytisch ist.

[15]) G. Grüss, Math. Zeitschr. 39 (1935), S. 732—741

(Eingegangen am 28. Mai 1943.)